ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHẠM VĂN THỊNH

BẤT ĐẲNG THỨC VỚI HÀM LỒI BỘ PHẬN VÀ ỨNG DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2017

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHẠM VĂN THỊNH

BẤT ĐẲNG THỨC VỚI HÀM LỒI BỘ PHẬN VÀ ỨNG DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành:	**Phương pháp Toán sơ cấp**
Mã số:	**60 46 01 13**

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
TS. NGÔ VĂN ĐỊNH

THÁI NGUYÊN - 2017

Mục lục

Lời cảm ơn

Luận văn này được thực hiện tại Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên và hoàn thành với sự hướng dẫn của TS. Ngô Văn Định (Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên). Tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc tới người hướng dẫn khoa học của mình, người đã đặt vấn đề nghiên cứu, dành nhiều thời gian hướng dẫn và tận tình giải đáp những thắc mắc của tác giả trong suốt quá trình làm luận văn.

Tác giả xin trân trọng cảm ơn Ban Giám hiệu Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, Ban Chủ nhiệm Khoa Toán–Tin, cùng các giảng viên đã tham gia giảng dạy, đã tạo mọi điều kiện tốt nhất để tác giả học tập và nghiên cứu.

Tác giả muốn gửi những lời cảm ơn tốt đẹp nhất tới tập thể lớp Cao học Toán khóa 9B (2015-2017) đã động viên và giúp đỡ tác giả rất nhiều trong suốt quá trình học tập.

Nhân dịp này, tác giả cũng xin chân thành cảm ơn Sở Giáo dục và Đào tạo Hải Phòng, Ban Giám hiệu và các đồng nghiệp ở Trường THPT Nguyễn Đức Cảnh (Kiến Thụy, Hải Phòng) đã luôn chia sẻ những khó khăn để tác giả hoàn thành tốt nhiệm vụ học tập và công tác của mình.

Cuối cùng, tác giả xin gửi những lời cảm ơn đặc biệt nhất đến bố mẹ và gia đình vì những động viên và chia sẻ để tác giả hoàn thành luận văn này.

Mở đầu

Hàm lồi và bất đẳng thức Jensen là các công cụ quan trọng của Giải tích toán học. Các kết quả về chủ đề này rất sâu sắc và đã tìm được nhiều ứng dụng quan trọng trong các bài toán quan trọng của Giải tích, Tối ưu và lĩnh vực khác.

Bất đẳng thức là một công cụ toán học để mô tả về các quan hệ thứ tự giữa hai đối tượng. Chính vì thế các bất đẳng thức luôn đóng những vai trò quan trọng và cốt yếu trong nhiều lĩnh vực của toán học. Bên cạnh đó, các bất đẳng thức cũng liên quan rất chặt chẽ đến các bài toán cực trị, một vấn đề toán học luôn được quan tâm vì ý nghĩa thực tiễn của nó.

Sự mở rộng khái niệm hàm lồi thành các khái niệm khác như hàm nửa lồi, hay hàm lồi bộ phận, sẽ giúp toán học giải quyết được nhiều vấn đề thực tiễn hơn, vì nó cho phép người ta nghiên cứu các hàm số nhưng tính chất lồi chỉ đúng một tập hợp nào đó. Luận văn này có mục đích là nghiên cứu các bất đẳng thức với hàm lồi bộ phận và ứng dụng. Các vấn đề chính được quan tâm là các hàm nửa lồi và các mở rộng của bất đẳng thức Jensen cho chúng.

Ngoài các phần Mở đầu, Kết luận, Tài liệu tham khảo, nội dung chính của luận văn được trình bày trong ba chương như sau:

- *Chương 1. Bất đẳng thức với hàm nửa lồi.* Mối quan tâm chính của chương này là các kết quả về bất đẳng thức với hàm nửa lồi. Trước hết chúng tôi trình bày về hàm lồi và bất đẳng thức Jensen. Sau đó là các kết quả về hàm nửa lồi và bất đẳng thức Jensen cho hàm nửa lồi. Tài liệu tham khảo chính của chương này là V. Cirtoaje, A. Baiesu [3] và Z. Pavić [4].

- *Chương 2. Bất đẳng thức với hàm lồi bộ phận*. Trong chương này chúng tôi trình bày về sự mở rộng bất đẳng thức Jensen cho hàm lồi bộ phận và các áp dụng cụ thể vào một số lớp bài toán bất đẳng thức. Chúng tôi dựa vào tài liệu V. Cirtoaje [1] để trình bày nội dung chương này.

- *Chương 3. Ba mở rộng của Định lý HCF và Định lý PCF*. Chương này dành cho việc trình bày về ba mở rộng của Định lý HCF và Định lý PCF. Sau đó chúng tôi sẽ minh họa sự mở rộng này bằng một số ví dụ cụ thể. Tài liệu tham khảo chính của Chương 3 là V. Cirtoaje [2].

Chương 1

Bất đẳng thức với hàm nửa lồi

Trong chương này, chúng tôi sẽ trình bày về hàm nửa lồi và bất đẳng thức Jensen cho hàm nửa lồi. Nội dung của chương được trình bày lại kết quả của V. Cirtoaje, A. Baiesu [3] và Z. Pavić [4] về hàm nửa lồi, bất đẳng thức Jensen cho hàm nửa lồi và mở rộng bất đẳng thức Jensen có trọng cho hàm nửa lồi.

1.1 Hàm lồi và bất đẳng thức Jensen

1.1.1 Tập lồi và hàm lồi

Trước khi nhắc lại về bất đẳng thức Jensen, chúng tôi nhắc lại về khái niệm tập lồi trong tập số thực $\mathbb{R}$ và hàm lồi xác định trên một tập lồi. Đây là những khái niệm rất quan trọng trong giải tích và đặc biệt được sử dụng rất nhiều trong lý thuyết bất đẳng thức.

Định nghĩa 1.1. Một tập con D của tập số thực $\mathbb{R}$ được gọi là *tập lồi* nếu với hai điểm a,b bất kỳ của D và với mọi λ thỏa mãn $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ ta có $\lambda a + (1-\lambda)b \in D$.

Ta dễ dàng thấy rằng các khoảng có dạng (a,b), $(a,+\infty)$, $(-\infty,b)$, $(a,b]$, $[a,b)$, $[a,b]$ hay toàn tập $\mathbb{R}$ là những tập lồi trong $\mathbb{R}$.

Định nghĩa 1.2. Cho D là một tập lồi trong $\mathbb{R}$ và $f : D \to \mathbb{R}$ là một hàm số xác định trên D. Ta nói f là một *hàm số lồi* nếu với mọi $x,y \in D$ và với mọi số thực

$\lambda \in (0,1)$ ta có

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y).$$

Ta có thể dễ dàng kiểm tra được bằng định nghĩa rằng các hàm số bậc nhất, $f(x)=ax+b$, với $a,b \in \mathbb{R}$, là những hàm lồi trên $\mathbb{R}$. Bên cạnh định nghĩa của hàm lồi, chúng ta có một số tiêu chuẩn để kiểm tra tính chất lồi của một hàm số. Chẳng hạn, ta có mệnh đề sau đây:

Mệnh đề 1.3. *Giả sử $f: D \to \mathbb{R}$ là hàm số liên tục và có đạo hàm đến cấp hai trên tập lồi D. Khi đó, f là hàm lồi khi và chỉ khi $f''(x) \geqslant 0$ với mọi $x \in D$.*

Sử dụng tiêu chuẩn này chúng ta dễ dàng kiểm tra được hàm số $f(x)=x^2$ là một hàm số lồi trên $\mathbb{R}$.

Định nghĩa 1.4. Tổ hợp

$$c=\sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

của các điểm x_i với các hệ số p_i được gọi là *tổ hợp affine* nếu $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$. Tổ hợp trên được gọi là *tổ hợp lồi* nếu nó là tổ hợp affine và $p_i \geqslant 0$ với $i=1,..,n$.

Lưu ý rằng nếu D là một tập lồi trong $\mathbb{R}$ và $c=\sum\limits_{i=1}^{n} p_i x_i$ là tổ hợp lồi của các điểm $x_1,\ldots,x_n \in D$ thì $c \in D$ và theo bất đẳng thức Jensen ta có

$$f(c) \leqslant \sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i).$$

Nếu $a,b \in \mathbb{R}$ là hai số thực phân biệt, giả sử $a<b$, thì mọi số thực x đều có thể biểu diễn được dưới dạng tổ hợp affine

$$x=\frac{b-x}{b-a}a+\frac{x-a}{b-a}b.$$

Tổ hợp affine này của a và b là tổ hợp lồi khi và chỉ khi x thuộc đoạn $[a,b]$. Cho trước hàm số $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gọi $l_{[a,b]}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm bậc nhất có đồ thị là đường thẳng đi qua hai điểm $(a,f(a))$ và $(b,f(b))$. Khi đó ta có

$$l_{[a,b]}(x)=\frac{b-x}{b-a}f(a)+\frac{x-a}{b-a}f(b).$$

Nếu f là hàm lồi trên $\mathbb{R}$ thì ta có bất đẳng thức

$$f(x) \leqslant l_{[a,b]}(x) \text{ nếu } x \in [a,b]$$

và

$$f(x) \geqslant l_{[a,b]}(x) \text{ nếu } x \notin (a,b).$$

1.1.2 Bất đẳng thức Jensen

Bất đẳng thức Jensen là một trong những công cụ hữu hiệu trong lý thuyết bất đẳng thức. Trong mục này, chúng tôi nhắc lại sơ lược về bất đẳng thức Jensen và một số vấn đề liên quan.

Mệnh đề 1.5. *Cho $f : D \to \mathbb{R}$ là hàm số xác định và liên tục trên tập lồi D. Khi đó, các khẳng định sau đây là tương đương:*

a) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, ta có

$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n),$$

với mọi $x_1, \ldots, x_n \in D$ và $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+$ thỏa mãn $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$;

b) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, ta có

$$f(r_1 x_1 + \cdots + r_n x_n) \leqslant r_1 f(x_1) + \cdots + r_n f(x_n),$$

với mọi $x_1, \ldots, x_n \in D$ và $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{Q}_+$ thỏa mãn $r_1 + \cdots + r_n = 1$;

c) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, ta có

$$f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) \leqslant \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n},$$

với mọi $x_1, \ldots, x_n \in D$;

d) Với mọi $k \in \mathbb{N}_0$, ta có

$$f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_{2^k}}{2^k}\right) \leqslant \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_{2^k})}{2^k},$$

với mọi $x_1, \ldots, x_{2^k} \in D$;

e) Với mọi $x, y \in D$, ta có

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2};$$

f) Với mọi $x, y \in D$ và mọi $\lambda \in (0,1)$, ta có

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Chứng minh. • Trước tiên, ta thấy rằng $a) \Rightarrow b) \Rightarrow c) \Rightarrow d) \Rightarrow e)$ là hiển nhiên;

• $b) \Rightarrow a)$: Giả sử $x_1, \dots, x_n \in D$ và $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+$ thỏa mãn $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$. Khi đó, tồn tại n dãy số hữu tỷ dương $\{r_k(1)\}_{k\in\mathbb{N}}, \dots, \{r_k(n)\}_{k\in\mathbb{N}}$ thỏa mãn

$$\lim_{k\to+\infty} r_k(j) = \lambda_j, \text{ với }, 1 \leqslant j \leqslant n, \text{ và } r_k(1) + \cdots + r_k(n) = 1, \text{ với mọi } k \in \mathbb{N}.$$

Theo $b)$ ta có

$$f(r_k(1)x_1 + \cdots + r_k(n)x_n) \leqslant r_k(1) f(x_1) + \cdots + r_k(n) f(x_n), \text{ với mọi } k \in \mathbb{N}.$$

Do f là hàm liên tục nên khi cho $k \to +\infty$ ta được

$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n).$$

• $c) \Rightarrow b)$: Giả sử $x_1, \dots, x_n \in D$ và $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{Q}_+$ thỏa mãn $r_1 + \cdots + r_n = 1$. Khi đó, tồn tại $N \in \mathbb{N}$ sao cho $Nr_1, \dots, Nr_n \in \mathbb{N}$. Với mỗi $i \in \{1, \dots, n\}$, ta có thể viết $r_i = \dfrac{p_i}{N}$, trong đó $p_i \in \mathbb{N}$. Do $r_1 + \cdots + r_n = 1$ nên ta có $N = p_1 + \cdots + p_n$. Áp dụng $c)$, ta được

$$\begin{aligned}
f(r_1 x_1 + \cdots + r_n x_n) &= f\left(\frac{\overbrace{x_1 + \cdots + x_1}^{p_1 \text{ lần}} + \cdots + \overbrace{x_n + \cdots + x_n}^{p_n \text{ lần}}}{N}\right) \\
&\leqslant \frac{\overbrace{f(x_1) + \cdots + f(x_1)}^{p_1 \text{ lần}} + \cdots + \overbrace{f(x_n) + \cdots + f(x_n)}^{p_n \text{ lần}}}{N} \\
&= r_1 f(x_1) + \cdots + r_n f(x_n).
\end{aligned}$$